GRINZI SIMPLU REZEMATE ACȚIONATE DE ÎNCĂRCĂRI MOBILE

Determinarea momentului *maxim* ($M_{(i)max}$) și a momentului *maxim maximorum* – ($M_{max\ max}$)

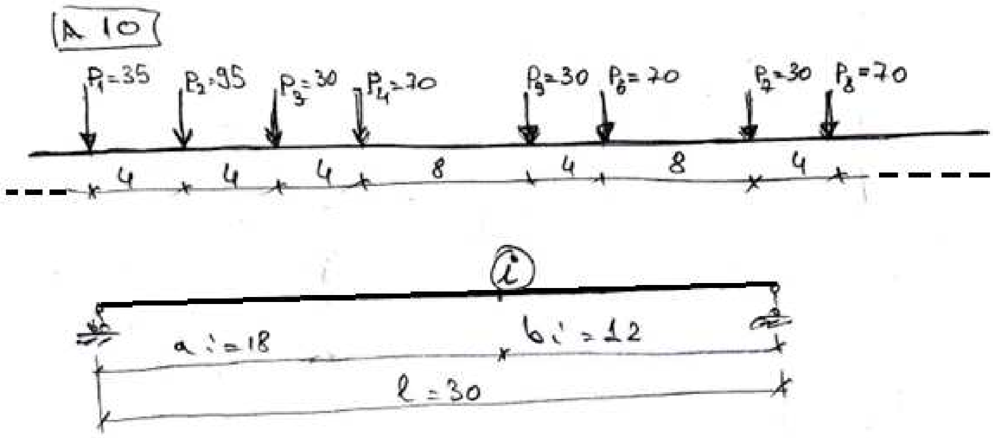

Fig.1 – Exemplu de grindă simplu rezemată cu ***l=30m*** și încărcată cu un convoi ***A10*** de acțiuni mobile

Determinarea pe cale analitică a $M_{(i)max}$

$\boldsymbol{M_{(i)max}}$ – **momentul maxim** in secțiunea $(\boldsymbol{i})$ se poate determina prin rezolvarea următoarelor puncte:

A. Determinarea poziției de moment maxim

Poziționarea convoiului de încărcări mobile pe grinda simplu rezemată astfel încât în secțiunea $(\boldsymbol{i})$ să se producă momentul încovoietor maxim.

Pentru determinarea acestei poziții se vor calcula următoarele 3 rapoarte și se vor compara între ele.

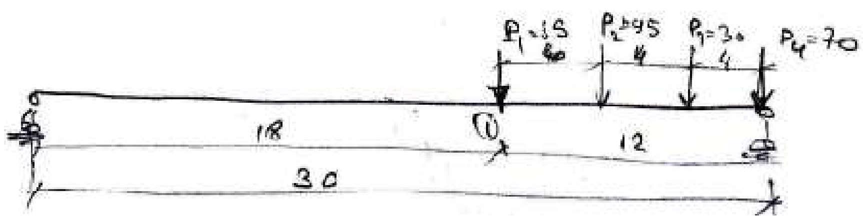

Fig. 2 – Situația în care $\mathbf{P_1}$ se află în secțiunea (i)

(I. 1) $$\boldsymbol{p_a} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{a_i}} = \frac{35}{18} = 1{,}94$$

- $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{P_j}$ reprezintă suma tuturor forțelor din convoi situate în partea stângă a secțiunii $(\boldsymbol{i})$, inclusiv forța din secțiunea $(\boldsymbol{i})$

- $\boldsymbol{a_i}$ reprezintă distanța de la reazemul din stânga până la secțiunea $(\boldsymbol{i})$

(I. 2) $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{l}} = \frac{35+95+30+70}{30} = \frac{230}{30} = 7{,}67$

- $\boldsymbol{R}$ reprezintă suma tuturor forțelor din convoi care calcă efectiv pe grindă

- $\boldsymbol{l}$ reprezintă lungimea (deschiderea) grinzii

(I. 3) $\boldsymbol{p_b} = \frac{\sum_{j=k}^{m} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{b_i}} = \frac{35+95+30+70}{12} = \frac{230}{12} = 19{,}67$

- $\sum_{j=k}^{m} \boldsymbol{P_j}$ reprezintă suma tuturor forțelor din convoi situate în dreapta secțiunii (i), inclusiv forța din secțiunea $(\boldsymbol{i})$

- $\boldsymbol{b_i}$ reprezintă distanța de la reazemul din dreapta până la secțiunea $(\boldsymbol{i})$

După evaluarea rapoartelor calculate acestea se compară între ele rezultând:

(I) $$\boxed{(p_a = 1{,}94) \ < \ (p = 7{,}67) \ < \ (p_b = 19{,}67)}$$

Se constată că $\boldsymbol{p_a} < \boldsymbol{p} < p_b$, ceea ce presupune mutarea convoiului spre stânga cu $\boldsymbol{P_k}$ astfel încât în secțiunea $(\boldsymbol{i})$ să calce forța următoare $\boldsymbol{P_{k+1}}$. *În caz contrar, adică $\boldsymbol{p_a} > \boldsymbol{p} > p_b$, se deplasează convoiul de forțe spre dreapta.* În exemplul grinzii cu lungimea de **30m**, se obține noua poziție în secțiunea $(\boldsymbol{i})$ conform Fig. 3.

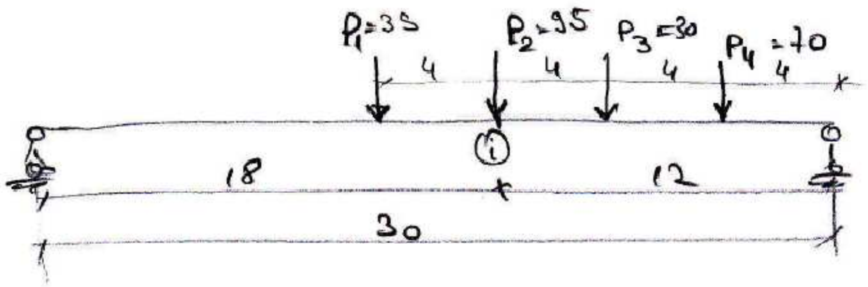

Fig. 3 – Poziția convoiului cu forța $\boldsymbol{P_{k+1}}$. în secțiunea $(\boldsymbol{i})$

Cu această nouă schemă se recalculează cele 3 rapoarte $\boldsymbol{p_a}; \boldsymbol{p}$ și $\boldsymbol{p_b}$ după care se compară între ele:

(II. 1) $\boldsymbol{p_a} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{a_i}} = \frac{35+95}{18} = 7{,}22$

(II. 2) $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{l}} = \frac{35+95+30+70}{30} = \frac{230}{30} = 7{,}67$

(II. 3) $\boldsymbol{p_b} = \frac{\sum_{j=k}^{m} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{b_i}} = \frac{95+30+70}{12} = \frac{195}{12} = 16{,}25$

(II) $$(p_a = 7{,}22) < (p = 7{,}67) < (p_b = 16{,}25)$$

Se constată din nou că $\boldsymbol{p_a} < \boldsymbol{p} < p_b$, ceea ce presupune mutarea convoiului spre stânga cu $\boldsymbol{P_{k+1}}$ astfel încât în secțiunea $(\boldsymbol{i})$ să calce forța următoare $\boldsymbol{P_{k+2}}$ (conform Fig. 4).

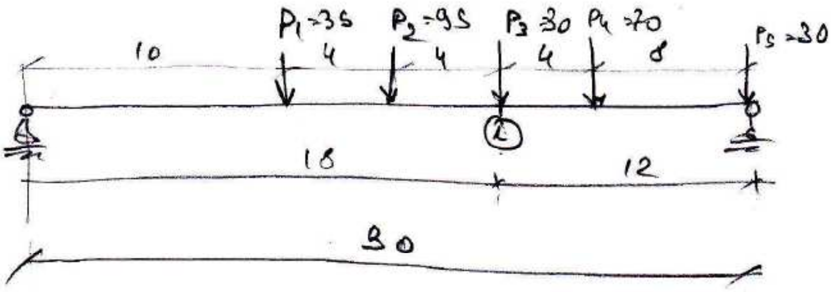

Fig. 4 - Poziția convoiului cu forța $\boldsymbol{P_{k+2}}$. în secțiunea $(\boldsymbol{i})$

Se observă că prin deplasarea convoiului spre stânga a mai apărut o **forță P_5=30 kN,** care în cazul grinzii de 30 m aceasta acționează chiar pe reazemul din dreapta al grinzii. Efectul acestei forțe se va considera prin evaluarea celor 3 rapoarte. Cu această nouă schemă se recalculează cele 3 rapoarte $\boldsymbol{p_a}; \boldsymbol{p}$ și $\boldsymbol{p_b}$ și se compară de asemenea între ele:

(III. 1) $$\boldsymbol{p_a} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{a_i}} = \frac{35+95+30}{18} = \frac{160}{18} = 8{,}89$$

(III. 2) $$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{l}} = \frac{35+95+30+70+30}{30} = \frac{260}{30} = 8{,}67$$

(III. 3) $$\boldsymbol{p_b} = \frac{\sum_{j=k}^{m} \boldsymbol{P_j}}{\boldsymbol{b_i}} = \frac{30+70+30}{12} = \frac{130}{12} = 10{,}83$$

(III) $$(p_a = 8{,}89) > (p = 8{,}67) < (p_b = 10{,}83)$$

Prin compararea celor 3 rapoarte, din relația (III) rezultă că poziția convoiului va produce un moment maxim în secțiunea $(\boldsymbol{i})$.

B. Determinarea valorii $M_{(i)max}$

Pentru evaluarea **momentului încovoietor maxim** $\boldsymbol{M_{(i)max}}$, se va folosi linia de influență (Fig. 5) determinându-se valoarea acestuia cu relația (IV).

(IV) $$\boldsymbol{M_{(i)max}} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P_k} \cdot \boldsymbol{m_{ik}}$$

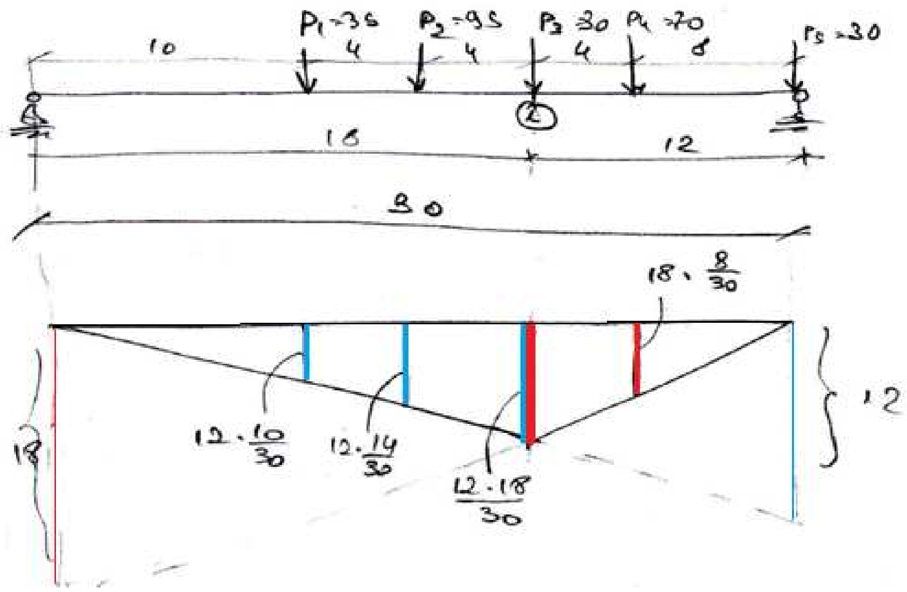

Fig. 5 – Linia de influență pentru calculul momentului $\boldsymbol{M}_{(i)max}$

$$\boldsymbol{M}_{(i)max} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_{k} \cdot \boldsymbol{m}_{ik} = \mathbf{35} \cdot 12 \cdot \frac{10}{30} + \mathbf{95} \cdot 12 \cdot \frac{14}{30} + \mathbf{30} \cdot 12 \cdot \frac{18}{30} + \mathbf{70} \cdot 18 \cdot \frac{8}{30}$$
$$= \frac{1}{30}(\mathbf{35} \cdot 12 \cdot 10 + \mathbf{95} \cdot 12 \cdot 14 + \mathbf{30} \cdot 12 \cdot 18 + \mathbf{70} \cdot 18 \cdot 8) = \frac{36720}{30}$$
$$= \mathbf{1224}\ \boldsymbol{kNm}$$

Determinarea pe cale analitică a $\boldsymbol{M}_{max\,max}$

$\mathrm{M}_{\max\,max}$ – reprezintă valoarea cea mai mare a momentului încovoietor care poate apare pe o grindă parcursă de un convoi de acțiuni mobile.

Din experiență, s-a observat că $\mathbf{M}_{max\,max}$ se produce în vecinătatea mijlocului grinzii la $\left({}^{l}/_{2}\right)$ și în apropierea poziției **rezultantei** $(\boldsymbol{R} = \sum \mathbf{P_k})$ a convoiului de forțe care acționează pe grindă.

Pentru determinarea poziției rezultantei, se stabilesc numărul total de forțe care **"calcă"** pe grindă după care se va calcula **rezultanta** acestora (**R).**

Pentru exemplul ales al grindei de **30 m lungime** acționată de convoiul **A10**, în Fig. 6 se prezintă schema de încărcare. Începând din reazemul din stânga al grinzii se distribuie convoiul de forțe (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6).la distanțele specifice dintre acestea, respectiv *4m+4m+4m+8m+4m=**24m***.

Diferența până la capătul grinzii (30-24=**6m**), nu mai permite ca și următoarea forță din convoi, care este situată la 8m distanță față de $\mathbf{P_6}$, să acționeze pe grindă, astfel că se vor lua în calcul doar forțele din schema din Fig. 6 și anume (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6).

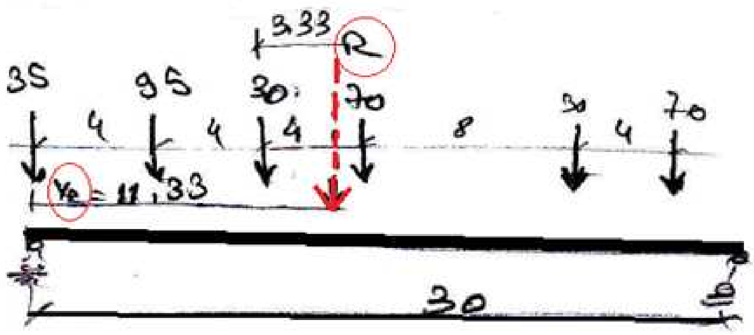

Fig. 6 – Poziția **rezultantei** (x_R) a convoiului de forțelor care acționează pe grindă

În continuare se calculează rezultanta forțelor din convoi cu relația (V) conform Fig. 6.

(V) $$\boldsymbol{R} = \sum \mathrm{P_k}$$

$$\boldsymbol{R} = \sum \mathrm{P_k} = 35 + 95 + 30 + 70 + 30 + 70 = \boldsymbol{330\ kN}$$

Folosind teorema lui VARIGNON care spune că *pentru un sistem de forţe concurente, **momentul rezultantei** în raport cu un **punct**, este egală cu **suma vectorială a momentelor** fiecărei **forţe** în raport cu **punctul** ales*, se poate determina astfel poziția rezultantei (x_R) în raport cu reazemul din stânga (*punctul în care acționează P*$_1$).

(VI) $$\boldsymbol{x_R} = \frac{\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P_k \cdot a_k}}{\mathbf{R}}$$

$\boldsymbol{a_k}$ – reprezintă brațul (distanța) de la fiecare forță din convoi până la punctul în care acționează P_1.

$\boldsymbol{P_k}$ – reprezintă forțele din convoi care acționează pe grindă (P2, P3,..., P6) în exemplul discutat.

Etape de calcul în vederea determinării $\mathbf{M}_{max\,max}$

A. Determinarea poziției Rezultantei

$$\boldsymbol{x_R} = \frac{\sum_{k=2}^{6} \mathbf{P_k \cdot a_k}}{\mathbf{R}} = \frac{(\mathbf{95}\mathrm{kN} \cdot 4\mathrm{m} + \mathbf{30}\mathrm{kN} \cdot 8\mathrm{m} + \mathbf{70}\mathrm{kN} \cdot 12\mathrm{m} + \mathbf{30}\mathrm{kN} \cdot 20\mathrm{m} + \mathbf{70}\mathrm{kN} \cdot 24\mathrm{m})}{330\mathrm{kN}}$$
$$= \frac{3740\mathrm{kNm}}{330\mathrm{kN}} = \mathbf{11,33m}$$

Valoarea obținută $\boldsymbol{x_R = 11,33m}$, conduce la poziționarea **Rezultantei** pe grindă la **11,33m** față de **P**$_1$ care acționează exact în reazemul din stânga. În continuare pe baza acestor elemente cunoscute se poate așeza convoiul de forțe astfel încât mijlocul **distanței** $(\boldsymbol{c} = 11{,}33m - 4m - 4m = \mathbf{3,33m})$ dintre **Rezultantă** și **forța vecină** din stânga, să coincidă cu mijlocul grinzii, la $\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{30}{2} = 15\mathrm{m}$.

B. Poziționarea convoiului de forțe

Pentru a realiza cele menționate mai sus se face o nouă schemă de încărcare respectând aceste condiții. În Fig. 7 se observă că prin *poziționarea convoiului* astfel încât **mijlocul distanței** dintre **rezultantă** și **forța vecină** din stânga adică

$$\boxed{\left({}^{c}/_{2}\right) = \frac{3.33}{2} = 1.67)}$$

să coincidă cu **mijlocul grinzii** $\left({}^{l}/_{2}\right)$**,** nu se modifică și distribuția convoiului de forțe. Acesta rămâne alcătuit din aceleași număr de forțe (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6).

În alte situații diferite de problema exemplu, dacă prin poziționarea convoiului se modifică și distribuția forțelor acestuia ("ies" sau „intră" forțe pe grindă) se va relua etapa precedentă A în care se vor determina iar Rezultanta și poziția acesteia conform celor de mai sus.

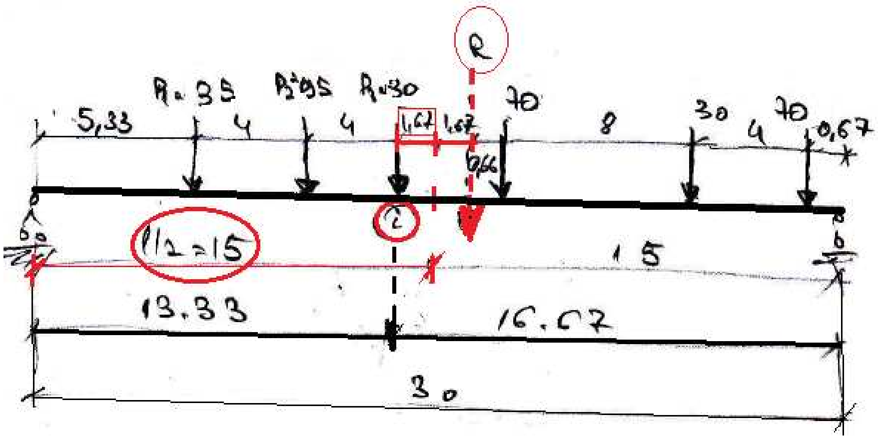

Fig. 7 – Poziționarea convoiului de forțe astfel încât mijlocul distanței dintre **Rezultantă** și **forța vecină** din stânga să coincidă cu **mijlocul grinzii**.

C. Poziția de maxim maximorum

Prin poziționarea convoiului conform Fig. 7, secțiunea în care se poate produce un eventual moment maxim maximorum $\mathbf{M}_{max\,max}$, este secțiunea $(\boldsymbol{i})$ din dreptul forței P_3 (în cazul exemplului), **forță** care este **simetrică** față de **rezultanta convoiului** în raport cu mijlocul grinzii. Pentru această secțiune se va calcula momentul maxim corespunzător urmărind etapele de la calculul $\boldsymbol{M}_{(i)max}$.

(C.I. 1) $\boldsymbol{p_a} = \frac{\sum_{j=1}^{k} P_j}{a_i} = \frac{35+95+30}{13,33} = \frac{160}{13,33} = 12,01$

(C.I. 2) $\boldsymbol{p} = \frac{R}{l} = \frac{35+95+30+70+30+70}{30} = \frac{330}{30} = 11$

(C.I. 3) $\boldsymbol{p_b} = \frac{\sum_{j=k}^{m} P_j}{b_i} = \frac{30+70+30+70}{16,67} = \frac{200}{16,67} = 11,99$

După evaluarea rapoartelor calculate acestea se compară între ele rezultând:

(C.I) $(p_a = 12{,}01) < (p = 11{,}00) < (p_b = 11{,}99)$

Această relație reprezintă poziția de eventual $\mathbf{M}_{max\,max}$ este posibilă. Pentru a fi îndeplinită complet condiția de $\mathbf{M}_{max\,max}$, **se verifică** și distribuția **forței tăietoare,** *dacă aceasta își schimbă semnul, în stânga* $(V_i^{st} > 0)$ *și* $(V_i^{dr} > 0)$ *dreapta secțiunii* (i).

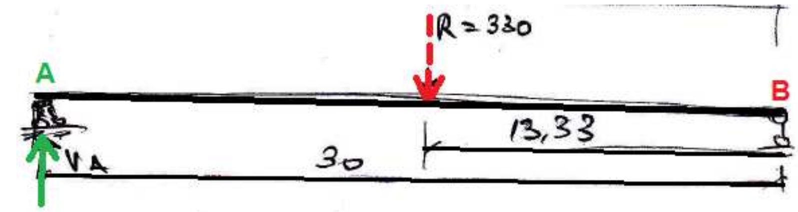

Fig. 8 – Calculul reacțiunii din stânga, pentru poziția convoiului de eventual maxim maximorum

$$\sum M_B = 0 = V_A \cdot l - R \cdot 13{,}33m = V_A \cdot 30m - 330kN \cdot 13{,}33m$$

$$V_A = \frac{330 \cdot 13{,}33}{30} = 146{,}63kN$$

D. Calculul forței tăietore în secțiunea (i)

Forța tăietoare în secțiunea (i) se calculează din partea stângă cunoscând reacțiunea V_A. Se observă din diagrama din Fig. 9, că în stânga este pozitivă iar în dreapta negativă.

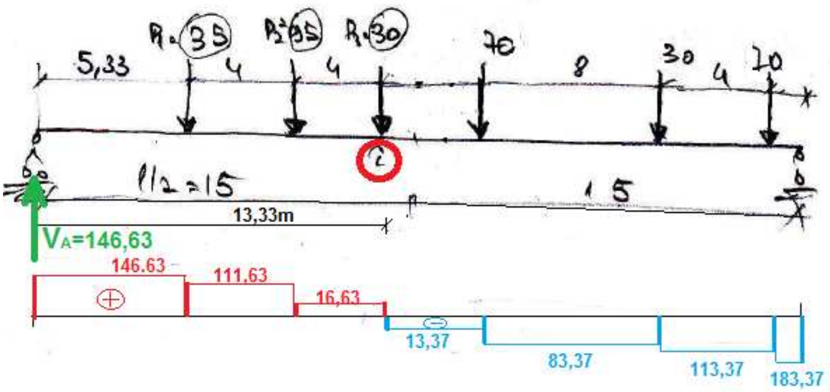

Fig. 9 – Diagrama de forță tăietoare pentru poziția de moment maxim maximorum a convoiului

E. Calculul valorii momentului maxim maximorum

În acest moment se poate calcula valoarea momentului maxim maximorum $\mathbf{M}_{max\,max}$ care se află în secțiunea (i) din schema din Fig. 9.

$$M_{max\,max} = V_A \cdot 13{,}33m - 35kN \cdot 8m - 95kN \cdot 4m = 1294{,}58kNm$$

Se observă prin compararea rezultatelor că:

$$M_{max\,max} = 1294{,}58kNm > M_{(i)\,max} = 1224\ kNm$$